オイラーのコマ

牧野真人

2024 年 9 月 8 日

物体が自由回転する際の物体の姿勢を記述する。物体のオイラー角を θ, ψ, ϕ とする。(定義が必要ですね。すいません）時間 t におけるオイラー角は、以下の式で表される。

$$\sin\theta\cos\psi = \mathrm{cn}(a, k')\mathrm{cn}(\lambda t + \epsilon) \tag{1}$$

$$\cos\theta = \mathrm{sn}(a, k')\mathrm{dn}(\lambda t + \epsilon) \tag{2}$$

$$\phi(t) = \phi(0) + (\alpha + \beta)t - \frac{\beta}{\lambda}\left\{\Pi(\mathrm{am}(\lambda t + \epsilon), \gamma, k) - \Pi(\mathrm{am}(\epsilon), \gamma, k)\right\} \tag{3}$$

である。式 (1) の代わりに

$$\sin\theta\sin\psi = \mathrm{dn}(a, k')\mathrm{sn}(\lambda t + \epsilon) \tag{4}$$

でもよい。ここで、sn,cn,dn はヤコビの楕円関数で、am は振幅関数、Π は第 3 種楕円積分である。また、定数であるが、

$$k^2 = \frac{(I_1 - I_2)(d^2 - cI_3)}{(I2 - I3)(I_1 c - d^2)} \tag{5}$$

$$k'^2 = 1 - k^2 \tag{6}$$

$$\lambda^2 = \frac{(I_2 - I_3)(cI_1 - d^2)}{I_1 I_2 I_3} \tag{7}$$

$$\alpha = \frac{d}{I_1} \tag{8}$$

$$\beta = d\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right)\frac{\mathrm{dn}^2(a, k')}{\mathrm{sn}^2(a, k')} \tag{9}$$

$$\gamma = \mathrm{tn}^2(a, k') \tag{10}$$

である。ここで、tn はヤコビの tn 関数である。$c = 2E$ で、E は運動エネルギーを表し、d^2 は角運動量ベクトル大きさの 2 乗を表す。定数 a に関しては、下の 3 つのいずれから決定する。

$$\mathrm{sn}(a, k') = \sqrt{(\frac{I_3(I_1 c - d^2)}{d^2(I_1 - I_3)}} \tag{11}$$

$$\mathrm{cn}(a, k') = \sqrt{(\frac{I_1(d^2 - I_2 c)}{d^2(I_1 - I_3)}} \tag{12}$$

$$\mathrm{dn}(a, k') = \sqrt{(\frac{I_2(d^2 - I_3 c)}{d^2(I_2 - I_3)}} \tag{13}$$

$\epsilon, \phi(0)$ は初期の物体の姿勢から決定する。姿勢は、オイラー角の 3 つの値から決定するが、エネルギー E や角運動量の大きさ d にも依存することから、独立に与えることは出来ない。

参考文献

[1] E.T. Whittaker, “A Treatise On the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies”, Gambridge University Press (1965)